LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 12

Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija

Lekcije iz Matematike 1.

12. Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatraju svojstva derivacija funkcija s obzirom na zbrajanje, oduzimenje, množenje, dijeljenje i kompoziciju (derivacija složene funkcije i inverzne funkcije).
Takodjer izvode se derivacije nekih najvažnijih elementarnih funkcija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Jedan od najopćenitijih znanstvenih pristupa nekom problemu jest da se on razloži na elementarne (sastavne) dijelove, da se ti elementarni dijelovi razriješe, te da se izgradi metoda rješavanja složenog problema ako se znadu riješiti njegovi sastavni dijelovi.
Poput složenih rečenica koje se grade od jednostavnih povezujući ih veznicima i sl., funkcije se tvore od jednostavnih pomoću operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kompozicije. Da bismo razriješili problem deriviranja funkcija, izvest ćemo pravila prema kojima se može odrediti derivacija funkcije ako se znadu derivacije njenih sastavnih dijelova. Takodjer ćemo izvesti derivacije najvažnijih elementarnih funkcija.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. analitičku definiciju derivacije funkcije (pomoću limesa):

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Osnovne elementarne funkcije (potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije), te njihova osnovna svojstva.
3. Pojam limesa funkcije i njegova svojstva.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Derivacija potencije

Već smo vidjeli da za $f(x) = x^2$ vrijedi $f'(x) = 2x$ što kraće zapisujemo kao:

$$(x^2)' = 2x$$

Neka je sad, općenito, $f(x) = x^n$, gdje je n prirodan broj. Tada je
$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$
Mogli bismo točno odrediti koeficijent uz svaku potenciju od x, medjutim, nama je važan samo koeficijent uz x^{n-1}. Sad je:

$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...) - x^n}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + (\ )x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0}(nx^{n-1} + (\ )x^{n-2}(\Delta x) + ...) =$

nx^{n-1}.
Kraće:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Primjer 1. (i) $(x^3)' = 3x^2$
(ii) $(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$
(iii) $(1)' = (x^0) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$ (derivacija konstantne funkcije 1 je nula; to smo mogli i izravno dobiti iz formule za derivaciju).

Očita svojstva derivacija funkcija

I. (i) (Derivacija zbroja je zbroj derivacija): $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
(ii) (Derivacija razlike je razlika derivacija): $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
II. $[cf(x)]' = cf'(x)$ za svaki broj (konstantu) c.
Formule se mogu zapisati i bez argumenta x:
I. $(f + g)' = f' + g'$
(ii) $(f - g)' = f' - g'$
II. $(cf)' = cf'$ za svaki broj (konstantu) c.

Te su formule izravne posljedice očitih svojstava limesa:
1. limes zbroja je zbroj limesa;
2. limes razlike je razlika limesa;
3. konstanta se može izlučiti ispred limesa.

Takodjer, vrijedi, a koristit ćemo poslije:
4. limes produkta je produkt limesa

5. limes kvocijenta je kvocijent limesa (ako u nazivniku nije nula).

Primjer 2. $(4x^3 - 5x^2 + 7x + 3)' = 4(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + 3(1)' = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 12x^2 - 10x + 7$

Vidimo da pomoću očitih svojstava i formule za derivaciju potencije možemo derivirati bilo koji polinom (deriviramo član po član).

Neočita svojstva derivacije funkcija:

III. (Derivacija umnoška-produkta funkcija:)
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(dakle **ne vrijedi** da je derivacija umnoška umnožak derivacija).
Izvod formule ostavit ćemo za kasnije.
Zapis bez argumenta x:

$$III.\ (fg)' = f'g + fg'$$

IV. (Derivacija kvocijenta-količnika funkcija:)
$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
(dakle **ne vrijedi** da je derivacija kvocijenta kvocijent derivacija).
Zapis bez argumenta x

$$IV.\ (\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Primjer 3. - Primjena formule za derivaciju kvocijenta: derivacija potencije s negativnim eksponentom.

$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$ To se može zapisati i kao:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

To znači da općenito vrijedi (za svaki cijeli eksponent m):

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

Izvod formule za derivaciju kvocijenta iz formule za derivaciju produkta.
1. korak: $\frac{f}{g} \cdot g = f$
2. korak (deriviramo): $(\frac{f}{g} \cdot g)' = f'$, tj.
$(\frac{f}{g})' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' = f'$
3. korak (sredjivanje): $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Izvod formule za derivaciju produkta

$(f(x)g(x))' =$

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}=$ (dodamo i oduzmemo $f(x)g(x+\Delta x)$)

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)]+[f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)]}{\Delta x}=$ (limes zbroja je zbroj limesa)

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}=$ (limes produkta je produkt limesa)

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Derivacija sinusa i kosinusa. Vrijedi:

$$(\sin x)'=\cos x;\ (\cos x)'=-\sin x$$

(derivacija *sinusa* je *kosinus*, a kosinusa *minus sinus*).

Primjer 4. (i) $(x\sin x)'=x'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$.
(ii) $(x\cos x)'=x'\cos x+x(\cos x)'=\cos x+x(-\sin x)=\cos x-x\sin x$.

Uočite da, općenito, ne možemo u izrazu za derivaciju funkcije pomoću limesa, uvrstiti $\Delta x=0$, jer bismo dobili izraz $\frac{0}{0}$. Tu smo poteskoću kod izvodjenja formule za derivaciju potencije uspjeli razriješiti tako što smo u brojniku izlučili Δx, te pokratili Δx u nazivniku. Nakon toga smo u limesu mogli uvrstiti $\Delta x=0$ i dobiti rezultat. Tako nešto ne vrijedi općenito, tj. nećemo uvijek moći izlučiti Δx u brojniku. Na primjer, to nećemo moći učiniti pri izvodu formula za derivaciju sinusa, kosinusa, eksponencijalne funkcije. Zato ćemo trebati neke posebne, tkzv. **značajne** limese.

Značajni limes koji je potreban za izvod formule za derivaciju sinusa i kosinusa:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\ (\star)$$

(na ma će biti potrebna ta formula u kojoj će umjesto t biti Δx). U istinitost jednakosti uvjeravamo se uvrštavanjem sve manjih vrijednosti t. Naravno, ta se jednakost moqv ze i strogo matematiqv cki dokazati. Uočite da se taj limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t=0$ (jer se dobije $\frac{0}{0}$).

Primjer 5. - neki limesi koji se izvode iz $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$
(i) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$
(ii) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0$

Za (i) uočimo da za $\cos t\neq -1$ vrijedi:
$\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\frac{1-\cos^2 t}{t^2(1+\cos t)}=\frac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\cos t}=(\frac{\sin t}{t})^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}$
Zato je
$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Tvrdnja (ii) izravno slijedi iz (i). Naime:
$\frac{1-\cos t}{t} = \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t$, pa je:
$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Za izvod derivacije sinusa i kosinusa potrebno je poznavati i adicijske formule (ili formule za pretvaranje zbroja u produkt). Na primjer:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Izvod formule za derivaciju sinusa

$(\sin x)' =$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$ (adicijska formula za sinus)

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$ (grupiranje 1. i 3. člana)

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x[\cos \Delta x - 1] + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} =$

$\sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[\cos \Delta x - 1]}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$

$\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 =$

$\cos x$.
Tu smo $\sin x$, odnosno $\cos x$ izvukli ispred limesa jer ti izrazi ne ovise o Δx, pa se ponašaju kao konstante; takodjer smo iskoristili limes "sinus iks kroz iks", tj. značajni limes ($\star$) i limes (ii) iz Primjera 5.
Formula za derivaciju kosinusa izvede se slično, samo se treba koristiti adicijska formula za kosinus (ili formula za pretvaranje razlike kosinusa u produkt).

Primjer 6. - Još jedna primjena formule za derivaciju kvocijenta: derivacija tangensa i kotangensa. Vrijedi

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Na primjer,
$(tgx)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Značajni limes koji je potreban za izvod formule za derivaciju eksponencijalne funkcije:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \ (\star\star)$$

U taj se limes takodjer možemo uvjeriti uvrštavanjem sve manjih brojeva t (dokaz ovdje ne provodimo). Uočite da se limes ne može dobiti pukim uvrštavanjem $t = 0$ (dobije se $\frac{0}{0}$).

Derivacija eksponencijalne funkcije:

$$(e^x)' = e^x$$

(eksponencijalna funkcija s prirodnom bazom ne mijenja se pri deriviranju)
Izvod formule
$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x [e^{\Delta x} - 1]}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x$.

V. Formula za derivaciju složene funkcije - derivacija kompozicije:

$$[f(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Zapis bez argumenta x

$$V.\ (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

(uočite razliku izmedju znaka $\circ$ koji označuje kompoziciju funkcija od znaka $\cdot$ koji označuje množenje(i katkad se ispušta).

Primjer 7. - jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije:
$[\sin(ax)]' = a \cdot \cos(ax)$, za svaki realan broj (konstantu) a.
Naime, prema formuli za derivaciju kompozicije, vrijedi:
$[\sin(ax)]' = \sin'(ax) \cdot (ax)' = \cos(ax) \cdot a = a \cdot \cos(ax)$.
Dakle $[\sin(2x)]' = 2\cos(2x)$, a ne $\cos(2x)$ kako se na prvi pogled može učiniti.

Primjer 8. - još jedna primjena formule za derivaciju složene funkcije - derivacija opće eksponencijalne funkcije:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Naime, iz $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$, dobijemo
$(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = e^{\ln a \cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = a^x \cdot \ln a$

VI. Važna primjena formule za derivaciju složene funkcije - formula za derivaciju inverzne funkcije.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Zapis bez argumenta x

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Izvod formule za derivaciju inverzne funkcije.

Iz $f[f^{-1}(x)] = x$ za sve x iz domene od f^{-1}, deriviranjem dobijemo: $(f[f^{-1}(x)])' = 1$, tj. $f'[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x) = 1$, odakle se dobije tražena formula.

Primjena formule za derivaciju inverzne funkcije - derivacija logaritamske funkcije i arkus funkcija

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Naime, tu je $f^{-1}(x) := \ln x$ pa je $f(x) := e^x$, dakle $f'(x) = e^x$, takodje. Sad je: $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

2. $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(Arccosx)' = -(Arcsinx)'$

Naime, ako je $f^{-1} = Arcsin$, onda je $f = \sin$ i $f' = \cos$ (ali na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Napomenimo da na tom intervalu vrijedi $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (jer je tu kosinus pozitivan). Zato je sad

$(Arcsinx)' = \frac{1}{\sin'(Arcsinx)} = \frac{1}{\cos(Arcsinx)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(Arcsinx)}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(Arcsinx)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Uočite da je desna strana u formuli za derivaciju *arkussinusa* definirana za $-1 < x < 1$, što znači da funkcija nije derivabilna u rubovima (to se vidi geometrijski tako što je tangenta na graf u rubnim točkama usporedna s y-osi - ima "beskonačan" koeficijent smjera).

Tablica značajnih integrala - treba znati napamet

1. (i) $(x^n)' = nx^{n-1}$

- to vrijedi za sve realne eksponente, a ne samo za prirodne.

(ii) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, specijalno

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $(\sin)' = \cos$

$(\cos)' = -\sin$

$(tg)' = \frac{1}{\cos^2}$

$(ctg)' = -\frac{1}{\sin^2}$

3. $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(Arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(Arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$